球谐函数的研究历史悠久,迄今已有200多年的历史.三维欧几里德空间的单位球面上的经典球谐函数可以看作是单位圆上三角函数的扩展.球形谐波最初是为研究拉普拉斯（Laplace）和勒让德（Legendre）的引力理论而引入的,在1780年代得到了广泛的研究,并广泛用于解决自然科学和工程学中的各种问题,包括地球科学,中子输运理论,天文学,传热理论,光学,大气物理学,海洋物理学,量子力学等领域[29,30,38,43,49,82,86,116,122].例如,在许多科学和工程学科中,最重要的方程是辐射传递方程或传输方程.辐射传递方程的稳态单能形式为:

其中是一个空间变量(空间位置),是方向变量,代表中的单位球面,是光源函数.公式(1.1)右侧的符号一个积分算子定义如下

是非负归一化相函数:

在文献中,通常假定函数与无关,然后我们将简化为.众所周知的Henyey-Greenstein相位函数(参见[62])为

其中参数是散射介质的各向异性因子.注意,对于各向同性散射,,对于前向散射,,对于后向散射,.

在数值上求解辐射传递方程(1.1)时,自然会出现诸如函数近似和单位球面上的数值积分之类的问题.通过将一个N阶球谐函数线性化组合来近似方程的解,导致文献中使用方法[74].由于辐射传递方程是具有五个独立变量的高维问题,因此允许轻松并行实现的数值方法很有吸引力.在这方面,对于辐射传递方程的离散化,不连续的Galerkin方法似乎是一个不错的选择.在[57]中研究了一些不连续的Galerkin方法用于辐射传递方程.近年来,辐射传递方程作为正向模型的反问题已在光学分子成像中得到应用[6,7,19,56].

本书旨在介绍一般d维欧几里德空间的单位球面上的球谐理论,并概述了单位球上的函数逼近和数值积分,以及与之有关的中单位圆近似的相关问题,并包括最近的研究结果.有几本关于球谐函数的优秀书籍,例如[47,78,84,85].球形谐波理论的介绍在这里以类似于[85]的方式给出,但仅具有分析的基本知识的读者就更容易获得.这是在第二章和第三章中完成的.第四章讨论中单位球和中单位圆的函数近似.单位球和单位圆的数值积分是第五章的主题.这本书以第一章结尾。图6是单位球面和单位圆盘上的光谱方法示例。 R3中的边界积分方程在R3中的单位球面上转换为一个，R2中偏微分方程的边界值问题在R2中的单位圆盘上转换为一个。然后提出了频谱数值方法并分析了这些变换问题的解决方案。本章的应用以光谱方法结束，以解决Sd上的Laplace-Beltrami方程.

本章的第一节介绍了将在整本书中定期使用的符号,并简要介绍了稍后在球谐函数研究中需要使用的函数.在本章的最后部分,我们介绍了与该领域相关的一些基本结果.

* 1. 符号

我们适用符号表示定义.我们还将使用下列符号:

* 正整数集合
* 非负整数集合
* 整数集合
* 实数集合
* 正实数集合
* 复数集合

对于,表示大于或等于的最小整数.对于,二项系数

这里表示阶乘,

我们回顾“双阶乘”的概念,供以后使用,

在整个工作中,除了第5章外,我们使用表示几何集的维度.集合

是维欧几里得空间且内积和模分别为

在,我们使用规范基,

且对于

有时明确显示维度会有所帮助,然后我们将写为而不是.从而,

这里,.为了方便起见,我们同样使用符号来表示维向量.这不会引起上下文的混乱.我们将经常使用中的单位球面,

通常,我们只是简单地将单位球体称为球体.对于任何,我们都有且.

两点之间的(欧式)距离为(**等式两边平方展开**)

上和之间的测地[geodesic]距离是两个向量之间的夹角:

它也是连接和的最短路径的弧长.从初等不平等(**需要证明**)

我们可以推论两个距离定义之间的以下等价关系(**需要证明**):

使用多索引符号很方便.具有个分量的多索引为.当我们需要明确指出对维度的依赖性时,我们写代替.的长度是.我们写意思是.当定义

相似地,对于梯度算子,我们定于

请注意,拉普拉斯算子

必要时,我们写和来明确表示空间维度.

* 1. **函数** 2020年3月17日10点47分

**定义1.1.**

可以验证以下公式[5,第1章].

显然.因此,根据公式可以得出

换句话说,函数将阶乘算子从正整数扩展为正数.我们得到

根据公式,我们具有

在的帮助下可以表示为

当其参数趋于∞时,斯特林公式提供函数的渐近阶:

选择带入到(1.11),我们简化为

因此得到

Pochhammer符号的定义如下.令.则

注意到

与函数密切相关的是beta函数,

我们有以下关系:

* 1. **与球有关的基本结论** 2020年3月17日10点55分

我们将用于维体积元素，将用于单位球体上维表面元素.在一般域的表面上,我们将用作表面元素.

对于,我们写,,

在这里和下面,类似于,根据上下文,我们使用表示维向量和维向量[**85,第一章**].当时,我们有

或简写为,

例如,令.对于中的一般点,在球坐标系下,

标记

则

此外,而的形式为.

公式将在本书的后面频繁应用.特别是,我们可以使用此公式来计算单位球的表面积

我们有

为了计算积分,我们变量变换.则

因此,我们有递归关系

我们从得出以下公式

已证明了该公式在的情况;对于是单位圆且是单位圆的周长.通过定义,我们还将对使用公式.请注意,公式也可以表示如下:

2020年3月24日09点33分

我们记录了一些随着变量变化计算积分的有用关系.他们的证明可以在[**85,第一章**]找到.

如果是正交的,则,.

与极坐标且一起,我们得到.

我们用表示上复数值或实数值连续函数的空间.这是具有规范范数的Banach空间

我们用表示上复数值或实数值平方可积函数的空间.这是一个具有标准内积的希尔伯特空间

及其诱发的范数

我们同样还使用或用作的内积,并且使用用作的范数.

我们将考虑具有内积和范数的空间.注意,是不完整.相对于范数,的闭包为.换句话说,给定,存在一个序列使得